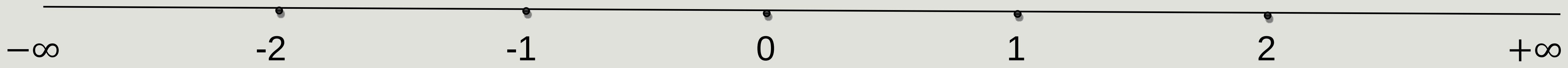
Πραγματικοί αριθμοί - Δυνάμεις

- Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους
- Δυνάμεις ορισμός - ιδιότητες
- Παραδείγματα
- Εφαρμογές
- Ασκήσεις

Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

Επαναλήψεις - συμπληρώσεις

- Το σύνολο N={0, 1, 2, 3, ... } ονομάζεται σύνολο των **φυσικών αριθμών**.
- Το σύνολο Z={0, ±1, ±2, ±3, ... } ονομάζεται σύνολο των **ακεραίων αριθμών**.
- **Ρητός** αριθμός ονομάζεται κάθε αριθμός που μπορεί να γραφεί με κλασματική μορφή ,δηλαδή τη μορφή .
  Το σύνολο των ρητών συμβολίζεται με Q.
- **Άρρητος** ονομάζεται ο αριθμός που δεν μπορεί να γραφεί με τη μορφή κλάσματος. Π.χ. : π=3,14.,
- Το σύνολο των πραγματικών αριθμών αποτελείται από όλους τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και συμβολίζεται με R.
- Οι πραγματικοί αριθμοί παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, του **άξονα των πραγματικών αριθμών**.



Με N* συμβολίζουμε το σύνολο που αποτελείται από όλους τους φυσικούς αριθμούς εκτός από το 0. Δηλαδή N*={1, 2, 3, …}. Ανάλογα ισχύει και για τα σύνολα: Z*, Q* και R*.

Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

Ιδιότητες πράξεων		
Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	α+β=β+α	α.β=β.α
Προσεταιριστική	α+(β+γ)=(α+β)+γ	α.(β.γ)=(α.β).γ
Ουδέτερο στοιχείο	α+0=α	α.1=α
Αντίθετος αριθμού	α+(-α)=0	
Αντίστροφος αριθμού		$\alpha.\frac{1}{\alpha}=1$
Επιμεριστική	α(β+γ)=α.β+α.γ	

- Ο αριθμός 0 λέγεται και ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, διότι προστιθέμενος σε οποιοδήποτε αριθμό δεν τον μεταβάλλει.
- Ο αριθμός 1 λέγεται και ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, διότι οποιοδήποτε αριθμός πολλαπλασιαζόμενος με αυτόν δεν μεταβάλλεται.
- Δύο αριθμοί α και β λέγονται αντίθετοι, όταν έχουν άθροισμα 0. Δηλαδή α+β=0. Ο αντίθετος του α συμβολίζεται με –α.
- Δύο αριθμοί α και β, διάφοροι του 0, λέγονται αντίστροφοι, όταν έχουν γινόμενο 1. Δηλαδή α.β=1. Ο αντίστροφος του α συμβολίζεται 1/α.
- Η αφαίρεση ορίζεται με τη βοήθεια της πρόσθεσης: α-β=α+(-β).
- Η διαίρεση ορίζεται με τη βοήθεια του πολλαπλασιασμού: α:β=α. = με β≠0.

Οι πράξεις και οι ιδιοτητές τους

Ιδιότητες πράξεων και ισότητας	
(α=β και γ=δ) $\Rightarrow$ α+γ=β+δ	(α=β και γ=δ) $\Rightarrow$ α.γ=β.δ
α=β $\Leftrightarrow$ α+γ=β+γ	Αν γ$\neq$0, τότε α=β $\Leftrightarrow$ α.γ=β.γ
α.β=0 , τότε α=0 <u>ή</u> β=0	α.β$\neq$0 τότε α$\neq$0 <u>και</u> β$\neq$0

- **Άρτιος** ονομάζεται ο ακέραιος αριθμός που είναι πολλαπλάσιος του δύο. Π.χ… -4, -2, 0, 2, 4, … . Έχει τη μορφή α=2κ με κ∈Z.
- **Περιττός** ονομάζεται ο ακέραιος αριθμός που δεν είναι πολλαπλάσιος του δύο. Π.χ…-5, -3, -1, 1, 3, 5… . Έχει τη μορφή α=2κ+1 με κ∈Z.

Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

Δυνάμεις

- **Δύναμη** με βάση έναν πραγματικό αριθμό α και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό $\nu>1$ ονομάζουμε το γινόμενο ν παραγόντων ίσων με τον αριθμό α, και συμβολίζεται: $\alpha^\nu=\alpha.\alpha.\alpha. \ldots .\alpha$ (ν παράγοντες).

Ιδιότητες των δυνάμεων			
$\alpha^\kappa.\alpha^\lambda=\alpha^{\kappa+\lambda}$		$\frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda}=\alpha^{\kappa-\lambda}$	
$\alpha^\kappa.\beta^\kappa=(\alpha.\beta)^\kappa$		$\frac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\kappa$	
$(\alpha^\kappa)^\lambda=\alpha^{\kappa.\lambda}$			
$\alpha^0=1$	$\alpha^1=\alpha$	$\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^\nu}$	$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$

- Αν α=β τότε $\alpha^\nu=\beta^\nu$, $\nu\in N^*$. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα: π.χ. $(-3)^2=3^2$, ενώ $-3\neq3$.

Δυνάμεις

Παραδείγματα - Εφαρμογές

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

- $(2^2)^3$
- $(2^3)^2$
- $(\alpha^{-1}.\alpha^3)^{-2}$
- $(\alpha^4.\beta^{-2})^3$
- $(\alpha^{-5}.\alpha^5)^{-4}$

$$\frac{4\alpha^4}{8\alpha^8}$$

$$\frac{63\alpha^3}{9\alpha^4}$$

$$\frac{x^3.125}{5^3.\,x^7}$$

$$\frac{\alpha^3}{\beta^4}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$$

Δυνάμεις

Ασκήσεις

- Δίνεται η παράσταση: Α=$\left[(x^2 . y^3)^{-2} . (x . y^3)^4\right] : \left(\frac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-3}$.

  i) Να δείξετε ότι Α=$x^9 . y^9$.

  ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης για χ=2017 και y=$\frac{1}{2017}$.

Λύση:

Δυνάμεις

Ασκήσεις

- Να βρείτε την τιμή της παράστασης: Α=$[(x.y^{-1})^2 : (x^3.y^7)^{-1}]^2$. για χ=0,4 και y=-2,5.

Λύση:

Δυνάμεις
Ασκήσεις

- Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α)$\alpha^{-2}.\alpha^{0}.\alpha^{2}=$

β) $\{(-\alpha)^{2}\}^{-3}=$

γ) $\beta^{-3}.\beta^{1}.\beta^{9}.\beta^{4}=$

δ) $(\beta^{\nu})^{-\mu}=$

ε) $\beta^{\nu}.\beta^{-\nu}=$

στ) $\chi^{6}:\chi^{-7}=$

ζ) $\chi^{6}:\chi^{-6}=$

η) $(3\alpha\beta\gamma)^{-2}=$