

Σύνολα

- Στοιχεία θεωρίας
- Πράξεις με σύνολα
- Παραδείγματα
- Εφαρμογές
- Ασκήσεις

Σύνολα

Στοιχεία θεωρίας

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή από τη διάνοησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

Τα αντικείμενα που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται **στοιχεία** ή **μέλη** του συνόλου.

Για να συμβολίσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε τα κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού ή Αγγλικού αλφαβήτου.

Π.χ.

\mathbb{N} το σύνολο των φυσικών αριθμών, \mathbb{Z} το σύνολο των ακεραίων αριθμών.

\mathbb{Q} το σύνολο των ρητών, \mathbb{R} το σύνολο των πραγματικών.

Η χρήση των συμβόλων \in και \notin

Για να δηλώσουμε ότι ένα στοιχείο ανήκει/δεν ανήκει σε κάποιο σύνολο χρησιμοποιούμε τα σύμβολα \in και \notin

αντίστοιχα. Π.χ. $3 \in \mathbb{N}$, $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\frac{2}{7} \notin \mathbb{N}$, $\frac{2}{7} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Σύνολα

Παράσταση συνόλου

Για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε δύο τρόπους:

α) Με **αναγραφή** (Όταν δίνονται όλα τα στοιχεία και είναι λίγα).

Π.χ. $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, \dots, 100\}$, $\Gamma=\{\text{Μαρία, Γιάννης, Κατερίνα}\}$

β) Με **περιγραφή**. (Όταν τα στοιχεία του συνόλου έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα).

Π.χ. $A=\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $B=\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ άρτιος}\}$, $\Gamma=\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 5\}$

Σύνολα

Ίσα σύνολα

Δύο σύνολα λέγονται **ίσα**, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. (Όταν κάθε στοιχείο του πρώτου συνόλου είναι στοιχείο του δεύτερου και αντιστρόφως, όταν κάθε στοιχείο του δεύτερου είναι και στοιχείο του πρώτου).

Π.χ. $A=\{0,1\}$, $B=\{x \in \mathbb{R} \mid x \cdot (x-1)=0\}$

Ένα σύνολο A λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου B , όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B . Π.χ. $A \subseteq B$.

Π.χ. Αν $A=\{1, 2, 3\}$ και $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, τότε

Αν $A=\{x \in \mathbb{R} \mid x \cdot (x-1) \cdot (x-2)=0\}$, και $B=\{1,2,3,4\}$ τότε

Κενό σύνολο λέγεται το σύνολο που δεν έχει στοιχεία και συμβολίζεται με \emptyset ή $\{ \}$.

Π.χ. Αν $A=\{x \in \mathbb{R} \mid x^2=-2\}$, τότε

Βασικό σύνολο, είναι το σύνολο από τα στοιχεία του οποίου φτιάχνουμε άλλα σύνολα και συμβολίζεται με Ω .

Παρατηρήσεις:

$A \subseteq A$, για κάθε A , $\emptyset \subseteq A$. Αν $A \subseteq B$, και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$. Αν $A \subseteq B$, και $B \subseteq A$, τότε $A = B$.

Σύνολα

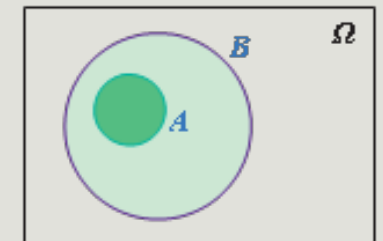
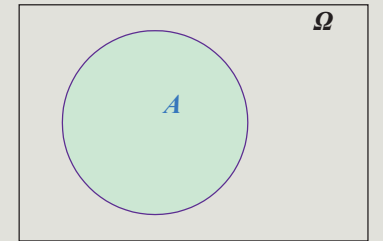
Διαγράμματα Venn

Τα διαγράμματα Venn αποτελούν μια εποπτική παρουσίαση των συνόλων και των μεταξύ τους σχέσεων.

Κάθε φορά που εργαζόμαστε με σύνολα, τα σύνολα αυτά θεωρούνται υποσύνολα ενός συνόλου που λέγεται βασικό σύνολο και συμβολίζεται με Ω . Για παράδειγμα, τα σύνολα \mathbb{N} , \mathbb{Z} και \mathbb{Q} , είναι υποσύνολα του βασικού συνόλου $\Omega = \mathbb{R}$.

Το βασικό σύνολο συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου, ενώ κάθε υποσύνολο ενός βασικού συνόλου παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου.

Αν $A \subseteq B$, τότε το A παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης που παριστάνει το B .

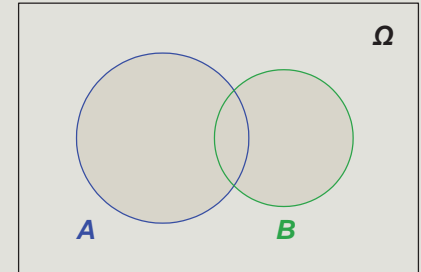


Σύνολα

Πράξεις με σύνολα

Ένωση δύο συνόλων A και B , ονομάζουμε ένα νέο σύνολο με στοιχεία τα κοινά και μη κοινά στοιχεία των συνόλων A και B (δηλαδή στοιχεία του βασικού συνόλου που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα δύο σύνολα) και συμβολίζεται με $A \cup B$. Δηλαδή: $A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A, \text{ ή } x \in B\}$

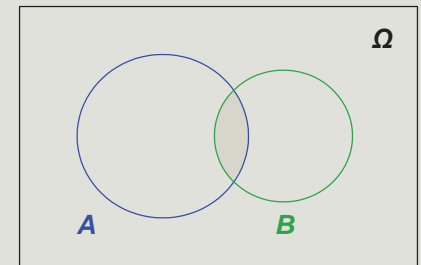
Π.χ. $A=\{1, 2, 3\}$ και $B=\{3, 4, 5\}$ τότε $A \cup B = \dots \dots \dots$



Τομή δύο συνόλων A και B , ονομάζουμε ένα νέο σύνολο που περιέχει τα κοινά στοιχεία των συνόλων A και B . Συμβολίζεται $A \cap B$.

Δηλαδή: $A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A, \text{ και } x \in B\}$

Π.χ. $A=\{1, 2, 3\}$ και $B=\{3, 4, 5\}$ τότε $A \cap B = \dots \dots \dots$



Ξένα μεταξύ τους ονομάζονται δύο σύνολα, όταν δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο. Δηλαδή $A \cap B = \emptyset$.

Π.χ. $A=\{1, 2, 3\}$ και $B=\{4, 5, 6\}$ τότε $A \cap B = \dots \dots \dots$

Σύνολα

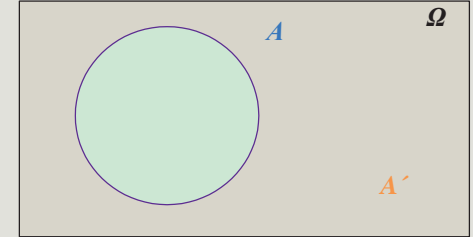
Πράξεις με σύνολα

Συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου A του βασικού συνόλου Ω , ονομάζουμε το σύνολο των στοιχείων του Ω , που δεν ανήκουν στο A και συμβολίζεται με A' . Δηλαδή $A' = \{x \in \Omega / x \notin A\}$.

Π.χ. Αν $\Omega = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \text{τα πιθανά αποτελέσματα από τη ρίψη ενός ζαριού}\}$

και $A = \{1, 2\}$ τότε

$A' = \dots\dots\dots$



Διαφορά ενός συνόλου B από ένα σύνολο A , λέγεται το σύνολο των στοιχείων του A που δεν ανήκουν στο B και συμβολίζεται: $A - B$.

Π.χ. Αν $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{1, 2\}$ τότε το $A - B = \dots\dots\dots$

Παρατηρήσεις:

$$\text{Αν } A \subseteq B, \text{ τότε } A \cap B = A$$

$$\text{Αν } A \subseteq B, \text{ τότε } A \cup B = B$$

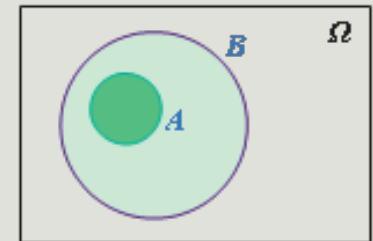
$$A \cup A' = \Omega$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$\emptyset' = \Omega$$

$$\Omega' = \emptyset$$

$$(A')' = A$$



Σύνολα

Εφαρμογές

- Σε κάθε μια από τις παρακάτω ερωτήσεις συμπληρώστε τις ισότητες:

1) Αν $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ διαιρέτης του } 16\}$ και $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ διαιρέτης του } 24\}$ τότε:

α) $A \cup B = \dots\dots\dots$ και β) $A \cap B = \dots\dots\dots$

2) Αν θεωρήσουμε ως βασικό σύνολο το σύνολο Ω των γραμμάτων του ελληνικού αλφάβητου και τα υποσύνολά του : $A = \{x \in \Omega \mid x \text{ φωνήεν}\}$ και $B = \{x \in \Omega \mid x \text{ σύμφωνο}\}$ τότε:

α) $A \cup B = \dots\dots\dots$, β) $A \cap B = \dots\dots\dots$, γ) $A' = \dots\dots\dots$, δ) $B' = \dots\dots\dots$

3) Αν Ω ένα βασικό σύνολο, \emptyset το κενό σύνολο και $A \subseteq \Omega$, τότε:

α) $\emptyset' = \dots\dots\dots$, β) $\Omega' = \dots\dots\dots$, γ) $(A')' = \dots\dots\dots$

Σύνολα

Ασκήσεις

- Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:
 - α) $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq k < 2\}$
 - β) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ διαιρέτης του } 12\}$
 - γ) $\Gamma = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ άρτιος και } x < 5\}$
 - δ) $\Delta = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ πολλαπλάσιο του } 6 \text{ και } 30 < x < 66\}$
 - ε) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ τα πιθανά αποτελέσματα από τη ρίψη ενός ζαριού}\}$
- Δίνονται τα σύνολα $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \cdot (x-1) \cdot (x-2) = 0\}$ και $B = \{0, 1, 2\}$.
 - α) Να εξετάσετε αν τα σύνολα είναι ίσα.
 - β) Να βρείτε όλα τα υποσύνολα του A .
 - γ) Το σύνολο $\Gamma = \{1, 2, 3\}$ είναι υποσύνολο του A ;

Σύνολα

Ασκήσεις – Πράξεις με σύνολα

- Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ένα βασικό σύνολο και τα υποσύνολά του $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $B = \{4, 5, 6\}$. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους και στη συνέχεια με διάγραμμα Venn τα σύνολα:

α) $A \cup B$,

β) $A \cap B$,

γ) $A - B$,

δ) A' ,

ε) $(A \cup B)'$,

στ) $(A \cap B)'$

Λύση